



Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Фізико-технічний інститут  
Кафедра біомедичної інженерії

30 7

**Вища математика-3. Ряди, елементи теорії функцій комплексної змінної. Теорія ймовірностей і математична статистика**

Галузь знань 16 Хімічна та біоінженерія  
Спеціальність 163 Біомедична інженерія

Курс	2
Семестр	1

Освітньо-професійна програма Медична інженерія  
Статус Обов'язкова дисципліна  
Форма навчання Денна  
Семестровий Екзамен  
контроль

ECTS	6,5
Годин	195

**Розподіл годин**

Аудиторні години			Самостійна робота
Лекції	Практичні	Лабораторні	
54	72	-	69

Гарант освітньої програми  
\_\_\_\_\_ Біолошицька О.К.  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ Шликов В.В.  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

Голова методичної комісії  
\_\_\_\_\_ Максименко В.Б.  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

Поточна редакція від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

**1. Інформація про викладача**

	Лекція	Практичні/лабораторні
ПІБ	Кучинська Наталія Вікторівна	Терещенко Іван Миколайович
Посада	Доцент кафедри інформаційної безпеки	Доцент кафедри інформаційної безпеки
Вчене звання	Доцент	-
Науковий ступінь	Кандидат технічних наук	Кандидат фізико-математичних наук
Профіль викладача	<a href="https://scholar.google.com/citations?user=leg0hbsAAAAJ&amp;hl=uk">https://scholar.google.com/citations?user=leg0hbsAAAAJ&amp;hl=uk</a>	<a href="http://ipt.kpi.ua/tereshchenko">http://ipt.kpi.ua/tereshchenko</a>
e-mail	n.kuchynska@kpi.ua	

## **2. Мета та завдання навчальної дисципліни**

**Мета:** вивчення методів які дозволяють аналітично досліджувати ймовірнісні моделі; обґрунтування застосування саме ймовірнісних засобів у сучасних розділах науки, техніки, інших галузях знань.

**Завдання:** вивчення методів теорії ймовірностей та математичної статистики, які дають можливість досліджувати найбільш загальні властивості процесів, абстрагуючись від тих властивостей, які не мають суттєвого значення.

Міждисциплінарні зв'язки: алгебра та геометрія, математичний аналіз, функціональний аналіз, випадкові процеси, актуарна математика.

### **Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких компетентностей:**

1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК -1)
2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях (ЗК -2)
3. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності (ЗК-4)
4. Здатність спілкуватися державною мовою усно і письмово (ЗК5)
5. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел (ЗК-7)
6. Здатність будувати математично-коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими параметрами із врахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів(ФК-3).
7. Здатність визначати основні чинники, які впливають на розвиток фізичних, економічних, соціальних процесів, відокремлювати в них стохастичні та невизначені показники, формулювати їх у вигляді випадкових або нечітких величин, векторів, процесів та досліджувати залежності між ними (ФК-4)
8. Здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження і аналізувати дані, отримані в них (ФК-10).

## **Програмні результати навчання:**

1. Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, векторну та лінійну алгебру, аналітичну геометрію та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу. (ПРН - 1)

2. Вміти визначати ймовірнісні розподіли стохастичних показників та факторів, що впливають на характеристики досліджуваних процесів, досліджувати властивості та знаходити характеристики багатовимірних випадкових векторів, використовувати їх для розв'язання прикладних задач, формалізувати стохастичні показники та фактори у вигляді випадкових величин, векторів, процесів. (ПРН -3)

3. Знати та вміти застосовувати основні методи постановки та вирішення задач системного аналізу в умовах невизначеності цілей, зовнішніх умов та конфліктів. (ПРН -6)

## **3. Програма навчальної дисципліни**

### **Семестр 3**

**Кредитний модуль:** Ряди, елементи теорії функцій комплексної змінної. Теорія ймовірностей і математична статистика

### **Модуль 1.**

#### **Змістовий модуль 1.**

**Тема 1. Вступ до дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика».**

Предмет та задачі курсу. Історичні етапи розвитку. Досягнення вітчизняної школи теорії ймовірностей. Сучасний стан та основні напрямки застосування.

Кількість годин на тему – 1, з них лекції – 1, практичні заняття – 0, самостійна робота – 0.

**Тема 2. Основні поняття теорії ймовірностей.**

Випадкові події. Класифікація подій. Аксиоматична побудова теорії ймовірностей. Теореми множення та додавання ймовірностей. Формула повної ймовірності. Теорема гіпотез. Геометрична ймовірність. Повторення випробувань. Формула Бернуллі. Граничні теореми Муавра-Лапласа та Пуассона. Похибки граничних теорем.

Кількість годин на тему – 31, з них лекції – 9, практичні заняття – 10, самостійна робота – 12.

## **Змістовий модуль 2**

### **Тема 3. Випадкові величини. Закон розподілу випадкової величини.**

Випадкові величини. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини. Дискретні величини. Неперервні величини. Функція розподілу. Щільність розподілу. Числові характеристики та моменти випадкової величини. Твірна функція моментів.

Кількість годин на тему – 18, з них лекції – 4, практичні заняття – 4, самостійна робота – 10.

### **Тема 4. Найбільш поширені закони розподілу.**

Найбільш поширені закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин: біномний, Пуассона, геометричний, показниковий, нормальний, рівномірний, Парето. Їх числові характеристики, властивості та застосування. Центрована та нормована величина. Розподіл Коші. Розподіл Гнеденка–Вейбулла.

Кількість годин на тему – 30, з них лекції – 8, практичні заняття – 8, самостійна робота – 14.

Модульний контроль за темами 1-4.

## **Модуль 2.**

### **Змістовий модуль 3**

#### **Тема 5. Двовимірні випадкові величини.**

Закон розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини. Сумісна щільність. Ймовірність влучення випадкової величини у довільну область. Коефіцієнт кореляції, його властивості. Незалежні випадкові величини. Двовимірна дискретна величина. Розподіл. Числові характеристики. Незалежність. Маргинальні та сумісні щільності. Порядкові статистики. Розподіл Релея.

Кількість годин на тему – 18, з них лекції – 4, практичні заняття – 4, самостійна робота – 10.

#### **Тема 6. Багатовимірні випадкові величини. Функції випадкових величин.**

Багатовимірний нормальний розподіл та його властивості. Закони розподілу функцій випадкових величин. Суми випадкових величин. Згортка. Загальні властивості числових характеристик. Закони Ерланга, гамма, Сімпсона, хі-квадрат, Стюдента, Фішера. Негативний біномний розподіл. Розподіли heavy-tail та умови їх застосування у сучасних ймовірнісних моделях.

Кількість годин на тему – 22, з них лекції – 6, практичні заняття – 6, самостійна робота – 10.

Модульний контроль за темами 5-6.

## Модуль 3

### Змістовий модуль 4

#### Тема 7. Умовні розподіли.

Умовні розподіли та умовне математичне сподівання. Умовні закони розподілу. Тотожність Вальда. Формула «повної дисперсії».

Кількість годин на тему – 18, з них лекції – 4, практичні заняття – 4, самостійна робота – 10.

### Змістовий модуль 5

#### Тема 8. Центральна гранична теорема.

Характеристична функція. Центральна гранична теорема. Теорема Ляпунова та Ліндеберга. Похибки граничних теорем.

Кількість годин на тему – 18, з них лекції – 4, практичні заняття – 4, самостійна робота – 10.

#### Тема 9. Закон великих чисел.

Нерівність Чебишова. Закон великих чисел у різних формах. Збіжність послідовностей випадкових величин. Збіжність за розподілом. Слабка збіжність. Збіжність у середньому порядку  $n$ . Посилений закон великих чисел.

Кількість годин на тему – 20, з них лекції – 4, практичні заняття – 4, самостійна робота – 12.

Модульний контроль за темами 7-9.

## Модуль 4

### Змістовий модуль 6

#### Тема 10. Вибірковий метод. Оцінки невідомих параметрів.

Вибірковий метод. Варіаційний ряд. Емпірична функція розподілу та гістограма. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу. Методи максимуму правдоподібності та моментів. Незміщеність. Узгодженість. Ефективність. Найважливіші розподіли ймовірностей у математичній статистиці. Розподіли статистик критеріїв. Інтервальні оцінки, довірчі інтервали.

Кількість годин на тему – 26, з них лекції – 6, практичні заняття – 8, самостійна робота – 12.

### **Тема 11. Перевірка статистичних гіпотез.**

Статистична перевірка гіпотез. Статистика критерію. Критична область. Помилки 1 та 2 роду . Рівень значущості та потужність критерію. Перевірка гіпотез щодо параметрів нормального, показникового, пуассонівського та біномного розподілів.

Перевірка гіпотез про параметри двох виборок. Перевірка гіпотези про незалежність. Перевірка гіпотез про вигляд закону розподілу. Критерії Колмогорова та Пірсона.

Кількість годин на тему – 36, з них лекції – 8, практичні заняття – 12, самостійна робота – 16.

### **Тема 12. Елементи теорії кореляції та регресії.**

Регресивні моделі. Поняття про однофакторний дисперсійний аналіз. Метод найменших квадратів для отримання оцінок невідомих параметрів. Довірчий інтервал для коефіцієнту кореляції.

Кількість годин на тему – 16, з них лекції – 6, практичні заняття – 8, самостійна робота – 8.

Модульний контроль за темами 10-12.

## **4. Індивідуальні завдання**

**Контрольна робота** на тему «Основні ймовірнісні закони розподілу» (Теми 4-5).

**Розрахункова робота** на тему «Точкові та інтервальні оцінки невідомих параметрів розподілу. Перевірка гіпотези про вигляд закону розподілу» (Теми 10-11)

## **5. Методи навчання**

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, індивідуальні консультації (при необхідності), самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою (методичні посібники), проведення олімпіад.

## **6. Методи контролю**

Проведення поточного контролю у вигляді тестів, усної задачі індивідуальних робіт, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді семестрового контролю: іспит (проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску).

## 7. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

### 7.1. Семестровий контроль

Змістовні модулі 1 – 2:

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
<b>Змістовні модулі 1-2</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	8	4
Робота на практичних заняттях	0...2	7	0...14
Самостійна робота	0...1	7	0...7
Модульний контроль	0...24	1	0...25
<b>Змістовний модуль 3</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	8	4
Робота на практичних заняттях	0...2	7	0...14
Самостійна робота	0...1	7	0...7
Модульний контроль	0...25	1	0...25
Виконання та захист розрахункової роботи	0...20	1	0...20
<b>Всього за модуль 1, 2</b>			<b>0...120</b>

Змістовні модулі 3 – 4:

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
<b>Змістовні модулі 4-5</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	8	4
Робота на практичних заняттях	0...2	7	0...14
Самостійна робота	0...1	7	0...7
Модульний контроль	4*5	1	0...20
<b>Змістовні модулі 3-5</b>			
Робота на лекціях	0...0,5	8	4
Робота на практичних заняттях	0...2	12	0...24
Самостійна робота	0...1	12	0...12
Модульний контроль	4*5	1	0...20
Виконання та захист розрахункової роботи	0...20	1	0...20
<b>Всього за модуль 3, 4</b>			<b>120</b>

\* Якщо кількість модульних балів у студента перевищує 100, то в якості підсумкової оцінки виставляється 100 балів.

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску до іспиту. При складанні семестрового іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту складається з двох теоретичних та трьох практичних завдань. За кожне теоретичне питання та практичне завдання студент може отримати до 20 балів. Максимальна сума всіх балів – 100.

## 7.2. Якісні критерії оцінювання

### Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

#### знати:

- Основні означення та теореми теорії ймовірностей
- Формули повної ймовірності та Байєса. Схему Бернуллі
- Означення та властивості дискретних та неперервних випадкових величин
- Способи завдання ВВ, поняття про незалежність
- Числові характеристики
- Умовні розподіли
- Граничні теореми
- Основні точкові та інтервальні оцінки невідомих параметрів розподілів
- Принципи перевірки статистичних гіпотез.

## 12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

**Задовільно (60-74).** Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Для семестру 3: Знати класичне означення ймовірності. Теореми додавання та множення. Формулу повної ймовірності. Схему незалежних випробувань. Означення функції розподілу та щільності. Означення та способи знаходження математичного сподівання та дисперсії дискретних та неперервних величин Для семестру 4: Знати зміст основних граничних теорем. Знати основні означення математичної статистики – емпірична функція розподілу, гістограма, точкові оцінки невідомих параметрів. Відповіді студента розкривають суть питань без достатньої повноти і обґрунтування, або у відповідях є неправильне тлумачення окремих понять та неточність у формулюванні відповідних термінів.

**Добре (75-89).** Твердо знати матеріал, захистити всі індивідуальні завдання. Для 3 семестру знати 6 основні класи дискретних та неперервних величин. Приклади їх застосування. Сумісний розподіл. Незалежність, некорельованість



та зв'язок між ними. Твірна функція моментів. Властивості числових характеристик випадкових величин. Закон розподілу функцій випадкових величин. Для 4 семестру: знати різні вигляди центральної граничної теореми та закону великих чисел. Знати властивості точкових та інтервальних оцінок невідомих параметрів розподілу. Знати основні задачі перевірки статистичних гіпотез, зокрема, про способи перевірки гіпотез про параметри розподілів, про вигляд розподілів та про незалежність. У відповідях студента можуть допускатися окремі помилки непринципового характеру, які не впливають на розкриття суті теоретичних питань. Завдання в цілому виконуються без помилок, але в обґрунтуванні розв'язання є певні недоліки.

**Відмінно (90-100).** Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх. Зокрема не лише знати зміст теорем, але й вміти доводити їх.

Курсову роботу не передбачено навчальним планом.

Протягом семестру студент отримує бали за накопичувальною системою згідно з таблицею наведеною в п. 7.1. Дано деякі пояснення до таблиці.

Робота на лекції – активна форма засвоєння матеріалу курсу: 0,5 бала ставиться за продумані питання, які студент задає лектору, участь в обговоренні предмета лекції, відповіді на питання, які по ходу лекції задає викладач. Активність студента може заохочуватися додатковими коефіцієнтами, які множаться на 0,5 бала.

Робота на практичному занятті оцінюється так: 2 бали за самостійно розв'язану задачу або за обґрунтовану відповідь на теоретичне питання з доведенням основних положень; 1 бал за розв'язану задачу за допомогою викладача.

Самостійна робота – 1 бал ставиться студенту за виконання домашнього завдання разом з його захистом.

Індивідуальне завдання включає виконання та захист розрахункової роботи за темами, зазначеними в назві роботи.

Модульний контроль проводиться на 8 і 16 тижнях на практичних заняттях.

Таблиця переведення рейтингових балів до оцінок за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка за університетською шкалою</i>
<i>100-95</i>	Відмінно
<i>94-85</i>	Дуже добре
<i>84-75</i>	Добре
<i>74-65</i>	Задовільно
<i>64-60</i>	Достатньо
<i>Менше 60</i>	Незадовільно
<i>Не виконані умови допуску</i>	Не допущено

## 8. Методичне забезпечення

### Робочі зошити та підручники:

1. Ніколаєв О.Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. - Харків, "Основа", 2000.
2. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах: Навч. посібник для ВУЗів. – Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
3. Навчально-методичне забезпечення дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів / Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т" - Харків, 2019. - с. - <http://library.khai.edu/library/fulltexts>
4. Робочий зошит. Варіаційне числення. Диференціальні рівняння у частинних похідних. Теорія ймовірностей. Харків, ХАІ.

## 9. Рекомендована література

### Базова

1. Барковський В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: Центр навчальної літератури, 2019. – 424 с.
2. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. Практичний курс вищої математики в чотирьох книгах: Навч. посібник для ВУЗів.– Харків: Нац. аерокос. ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2004.
3. Брисіна І.В., Макарічев В.О. Випадкові процеси. Харків, ХАІ, 2009.
4. Горбань І.Т. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. НАНУ, Інститут проблем математичних машин і систем, К., 2003 – с. 244
5. Карташов М.В. Ймовірність. Процеси. Статистика. К.: «Київський Університет», 2008, 494 с.
6. Кушлик – Дивульська О.І. та ін. Теорія ймовірностей та математична статистика. К: НТУУ «КПІ», 2014, - 212 с.
7. Медведєв. М.Г., Пащенко І.О. Теорія ймовірностей та математична статистика. Підручник. К.: Ліра, 2008. – 536 с.
8. Rotar, V. I. Actuarial Models: The Mathematics of Insurance [Text] / V. I. Rotar. – Chapman Hall/CRC, 2007. – 633 p. (Подарована випускником кафедри А.В.Ключком).

## Допоміжна

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.-М.-Наука,1991. -384 с.
2. Гнеденко Б.В. Теория вероятностей.-М.: Физматгиз ,1988.-406 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- 1975 .
4. Коваленко И.Н., Филиппова А.А.,- Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 1992.
5. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветокова Г.М. Теория вероятностей. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
6. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей.-К.:Вища школа,1990.- 328 с.
7. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. Ефимова А.В.-М.:Наука,1990.-432 с.
8. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.- Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА М.-1998,-528 с.
9. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А – Анализ данных на компьютере. М.: МЦНМО, 2015.–368 с.
- 10.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.- М.:Мир,1967,т.1-2..
- 11.Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. -. М.:Ленанд, 2016.-304 с.
- 12.Bruce Hajek. Probability with Engineering Applications. ECE 313 Course notes. Department of Electronic and Computer Engineering, University of Illinois, 2013

## 10. Інформаційні ресурси

<http://probability.univ.kiev.ua/index.php?page=history>

<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-440-probability-and-random-variables-spring-2014/lecture-notes/>

<http://weberprobability.blogspot.com/2014/02/table-of-distributions.html>

[https://zalsiary.kau.edu.sa/Files/0009120/Files/119387\\_A\\_First\\_Course\\_in\\_Probability\\_8th\\_Edition.pdf](https://zalsiary.kau.edu.sa/Files/0009120/Files/119387_A_First_Course_in_Probability_8th_Edition.pdf)

<https://www.math.cuhk.edu.hk/course/2021/math4240>

<https://www.math.vu.nl/~koole/obp/obp.pdf>

<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/stochOnline.html>